

# **Хаос и резонансы во вращающемся потоке, возмущенном периодическим движением точечного вихря**

**А. И. Гудименко**

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН  
690041, Россия, Владивосток, ул. Балтийская, 43  
algud@poi.dvo.ru

*Получено 12 января 2007 г.*

Численно и аналитически изучается гамильтонова динамическая система, описывающая двумерный вращающийся поток несжимаемой жидкости, возмущенный периодическим движением точечного вихря.

Численно показано, что в условиях возмущения в центре вращающегося потока образуется область сильно перемешанных траекторий системы. Размер этой области по порядку величины совпадает с максимальным отклонением точечного вихря от центра вращения. Это область увеличивается с ростом амплитуды возмущения за счет разрушения и поглощения близлежащих резонансов, порядок и расположение которых определяется отношением частоты возмущения к частоте вращения потока. Картина резонансов существенно различается в зависимости от того, целочисленно это отношение или дробно.

Результаты численного эксперимента обосновываются аналитически. В области, достаточно удаленной от вихря, получено представление гамильтониана в координатах угол—действие. На основе этого представления исследовано распределение на фазовой плоскости первичных резонансов системы. В частности, предложено разбиение резонансов на серии, адекватное наблюдаемым картинам резонансов. Вычислены ширины резонансов. Показано, что на больших расстояниях от вихря глобальная хаотизация траекторий системы происходить не может.

**Ключевые слова:** точечный вихрь, динамический хаос, нелинейные резонансы.

**A. I. Gudimenko**

## **Chaos and resonances in a rotating flow disturbed by a periodic motion of a point vortex**

A Hamiltonian dynamical system describing a rotating incompressible two-dimensional flow, disturbed by an oscillating point vortex, is studied numerically and analytically.

It is shown numerically that under perturbation the region of strongly mixed trajectories of the system forms. As the amplitude of perturbation increases, the region grows in size due to the destruction and absorption of the nearest resonances. The order and multiplicity of the resonances are determined mainly by the relation  $\omega/\Omega$ , where  $\omega$  is the perturbation frequency and  $\Omega$  is the rotation frequency of the flow. The patterns of the resonances differ essentially whether this quantity is integer or fractional.

The results of the numerical experiment are justified analytically. In the domain that is sufficiently far from the vortex, the Hamiltonian is represented in the angle—action variables. Based on the representation, the arrangement of the resonances on the phase plane is analyzed. In particular, a classification of the resonances, which is adequate to the numerical patterns, is proposed. The widths of the resonances are calculated. It is shown that, at large distances from the vortex, global chaotization of trajectories of the system is impossible.

**Keywords:** point vortex, chaotic dynamics, nonlinear resonances

**Mathematical Subject Classifications:** 37D45, 76U05, 76B47, 76E20

## 1. Введение

В работе изучается гамильтонова динамическая система на  $\mathbb{R}^2$ , определенная в декартовых координатах стандартной симплектической структурой  $dx \wedge dy$  и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \ln((x - x_c)^2 + y^2) + \frac{1}{2} \Omega(x^2 + y^2), \quad (1.1)$$

$$x_c(t) = a(1 - \delta \cos(\omega t)). \quad (1.2)$$

Предполагается, что  $\Omega \neq 0$  и, для определенности,  $a > 0$ ,  $\delta \geq 0$  и  $\omega > 0$ . Дальнейшие ограничения на параметры системы приводятся в основном тексте работы.

Данная динамическая система описывает поток, индуцированный двумя вихрями: точечным, подверженным пространственным гармоническим осцилляциями (первое слагаемое в гамильтониане), и равномерно распределенным неподвижным (второе слагаемое в гамильтониане). Осцилляции рассматриваются как возмущение с амплитудой  $\delta$  и частотой  $\omega$ . Так что система, другими словами, описывает вращающийся поток, возмущенный пространственными осцилляциями (или, выражаясь более общо, движением) точечного вихря.

Рассматриваемая система возникла при анализе модели приливного течения над точечной подводной возвышенностью (см. [1], где обсуждается аналогичная модель приливного течения над возвышенностью гауссовой формы). Она сохраняет все основные свойства этой модели, однако более удобна для аналитического исследования.

Из числа этих свойств отметим два, с нашей точки зрения наиболее ярких. Чтобы описать первое свойство, определим разбиение фазовой плоскости системы на две области: *внутреннюю*, с центром в начале координат и радиусом порядка максимального отклонения сингулярного вихря от центра, и *внешнюю*, дополнительную к внутренней. Численный эксперимент показывает, что при включении возмущения траектории фазовых частиц во внутренней области потока хаотизируются, образуя довольно причудливые фигуры (см. следующий раздел), форма и размер которых определяются параметрами системы. Эти фигуры состоят из разрушенных (полностью или частично, в зависимости от амплитуды возмущения) и перекрывшихся друг с другом резонансов.

Второе свойство — специфическая зависимость картин распределения резонансов на фазовой плоскости системы от величины  $\nu = \omega/\Omega$ . В частности, эти картины, смотря по тому, целое ли  $\nu$  или дробное, существенно разнятся — например в том, что в при дробных  $\nu$  наблюдаются дополнительные крупные резонансы.

Кратко содержание работы следующее. В разделе 2 приводятся и обсуждаются результаты численного эксперимента над системой. Здесь выявляются особенности механизма хаотизации фазового потока системы (согласно [2], хаотизация происходит при перекрытии резонансов) и дается представление о распределении ее резонансов. В разделе 3 система изучается аналитически. Цель анализа — 1) объяснить результаты численного эксперимента, касающиеся распределения резонансов, степени влияния тех или иных из них на процесс хаотизации потока; 2) обосновать гипотезу о невозможности глобальной хаотизации потока на больших расстояниях от центра, иначе говоря, объяснить, почему область хаотизации системы ограничена.

Для решения первой задачи мы вводим специальное (впрочем естественное) разбиение резонансов на серии. Оказывается, что именно резонансы начальных серий (нулевой и первой) определяют хаотическую область системы. Существенно, что при целых  $\nu$  нулевая серия резонансов отсутствует — это объясняет отмеченное выше специфическое поведение резонансов при дробных  $\nu$ .

Вторая задача решается через вычисление ширин резонансов. Оказывается, что эти ширины убывают по показательному закону с ростом порядка  $m$  и кратности  $n$  резонансов, причем

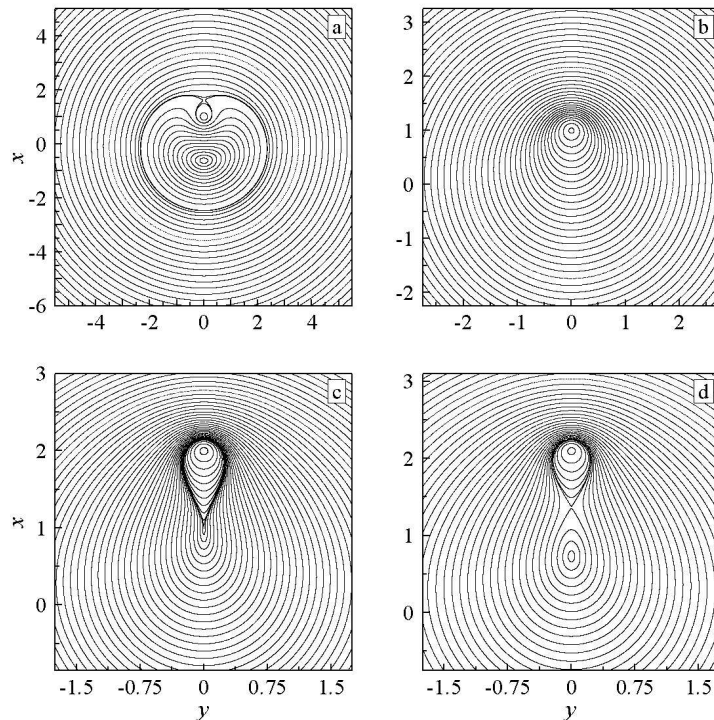


Рис. 1. Фазовые портреты невозмущенной системы: а)  $\Omega = -1$ ; б)  $\Omega = a = 1$ ; в)  $\Omega = 1, a = 2$ ; г)  $\Omega = 1, a = 2.1$

основания этих степеней по существу совпадают с обратным расстоянием до резонанса и амплитудой возмущения соответственно. Такой характер убывания ширин резонансов приводит к тому, что суммарная ширина резонансов, лежащих вне круга с центром в начале координат, стремится к нулю с ростом радиуса круга. Это означает (в соответствии с критерием хаотизации Чирикova [2]), что глобальной хаотизации потока на больших расстояниях от центра происходить не может.

## 2. Численный эксперимент

Предпошлем обсуждению результатов численного эксперимента над возмущенной системой качественное рассмотрение ее поведения в отсутствие возмущения.

### 2.1. Невозмущенная система

При  $\delta = 0$  система интегрируема. Ее фазовый поток определяется параметрами  $a$  и  $\Omega$  и имеет разную топологию, зависящую от величины  $\Omega a^2$ . При  $\Omega a^2 < 0$  поток разделяется сепаратрисой на три области циркуляции так, как это показано на рис. 1 а. Направление вращения потока в области, содержащей сингулярность, т. е. точку с координатами  $(a, 0)$ , противоположно направлению вращения потока в двух других областях. При  $0 \leq \Omega a^2 < 4$  поток циркулирует вокруг единственной эллиптической точки, совпадающей с его точкой сингулярности (см. рис. 1 б). То же происходит и при  $\Omega a^2 = 4$ , однако в этом случае поток имеет дополнительную неподвижную точку с координатами  $(a/2, 0)$  (см. рис. 1 в). При  $\Omega a^2 > 4$  поток снова разделяется сепаратрисой на три области циркуляции (см. рис. 1 г). Направление вращения во всех трех областях теперь

одинаковое.

## 2.2. Включение возмущения

При включенном возмущении центральная область потока обнаруживает неустойчивость. Отдельные его траектории ведут себя хаотически, заполняя всюду плотно внутренность некоторого двумерного многообразия (см. рис. 2–6). Это многообразие мы называем *хаотическим многообразием системы* или *областью хаотизации фазового потока системы*. Степень хаотизации потока и, следовательно, размер хаотического многообразия зависят от амплитуды возмущения. Форма же этого многообразия определяется величинами  $a$  и  $\nu = \omega/\Omega$ .

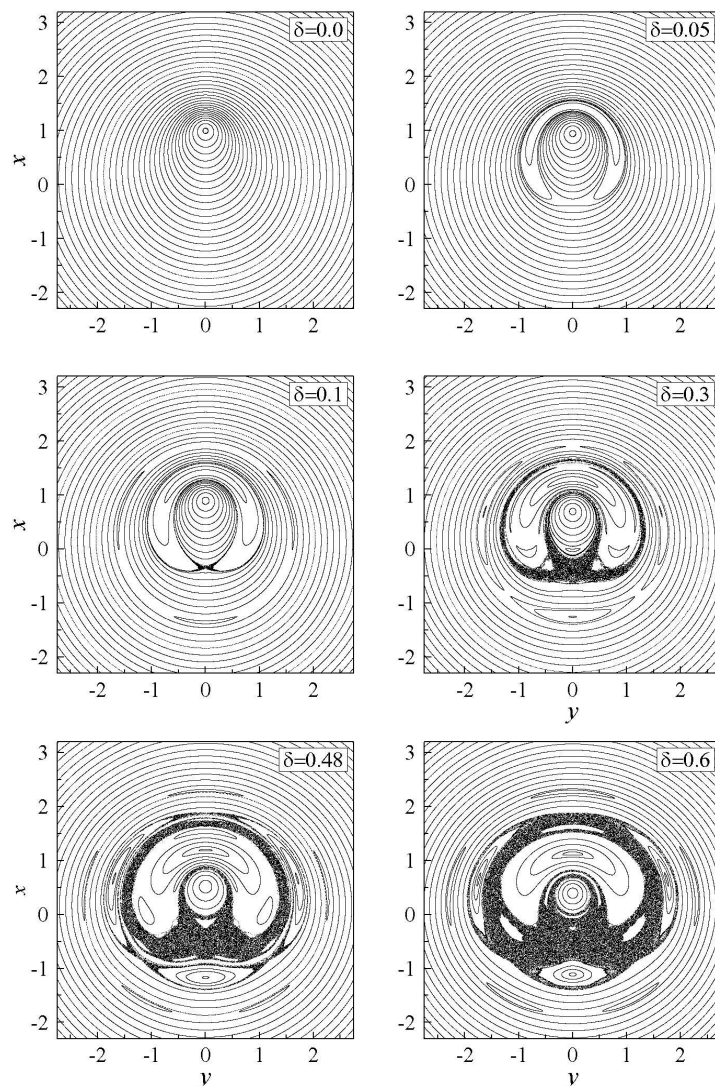


Рис. 2. Отображения Пуанкаре потока при  $a = \Omega = 1$ ,  $\omega = 2$  и указанных значениях амплитуды возмущения

Отметим, что при  $\nu = 1$  в системе наблюдается линейный (в асимптотическом смысле, на больших расстояниях от начала координат) резонанс, поток становится открытым, — этот слу-

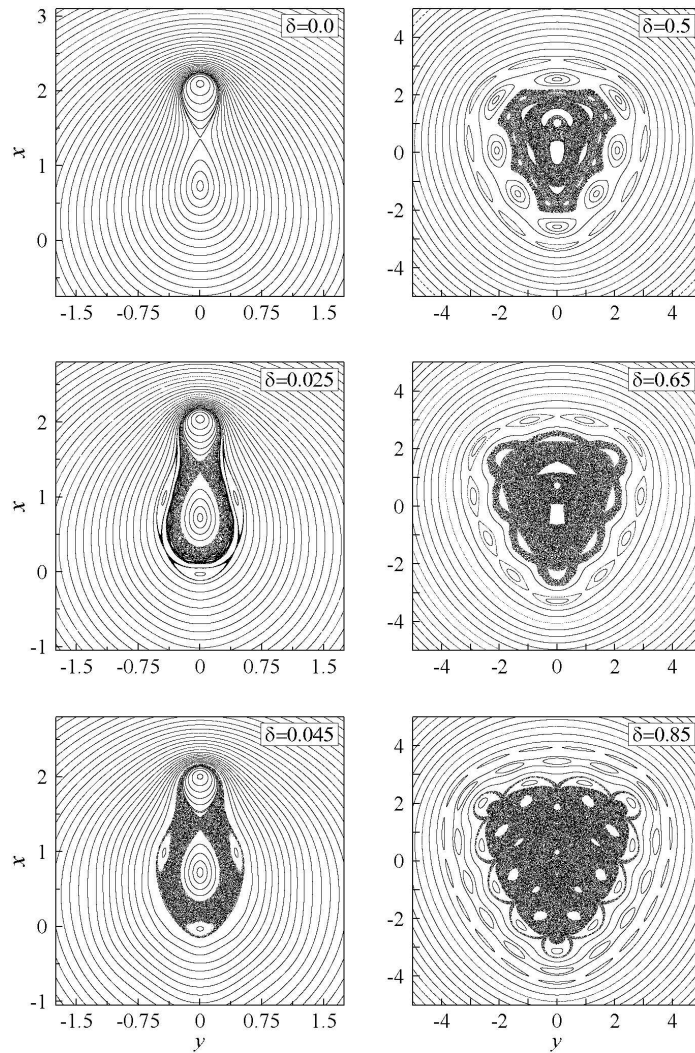


Рис. 3. Отображения Пуанкаре потока при  $a = 2.1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\omega = 3$  и указанных значениях амплитуды возмущения

чай в работе не рассматривается. Вообще, в данной работе мы ограничиваемся изучением потока при  $\nu > 1$ . Значения параметров  $a$ ,  $\omega$  и  $\Omega$  предполагаются при этом порядка единицы, т. е. не слишком малыми и не слишком большими.

Рис. 2 иллюстрирует механизм образования хаотического многообразия системы при целом  $\nu$  и  $0 < \Omega a^2 < 4$ , т. е. в отсутствие сепаратрисы в невозмущенном потоке. Мы видим, что включение возмущения ( $\delta = 0.05$ ) приводит к образованию в окрестности сингулярности резонанса первого порядка. С ростом амплитуды возмущения ( $\delta = 0.1$ ) этот резонанс, увеличиваясь в размерах, начинает разрушаться. При этом на некотором расстоянии от него проявляется очень узкий резонанс третьего порядка. Дальнейший рост амплитуды ( $\delta = 0.3$ ) приводит к образованию ярко выраженного стохастического слоя сепаратрисы резонанса первого порядка и увеличению ширины резонанса третьего порядка. При  $\delta = 0.48$  последний резонанс, уже частично разрушенный, вплотную приближается к этому слою и при  $\delta = 0.6$  поглощается им. Далее процесс повторяется с резонансами пятого, седьмого и т. д. порядков. Вот так, за счет развития, разрушения и поглощения резонанса за резонансом, и образуется хаотическое многообразие системы.

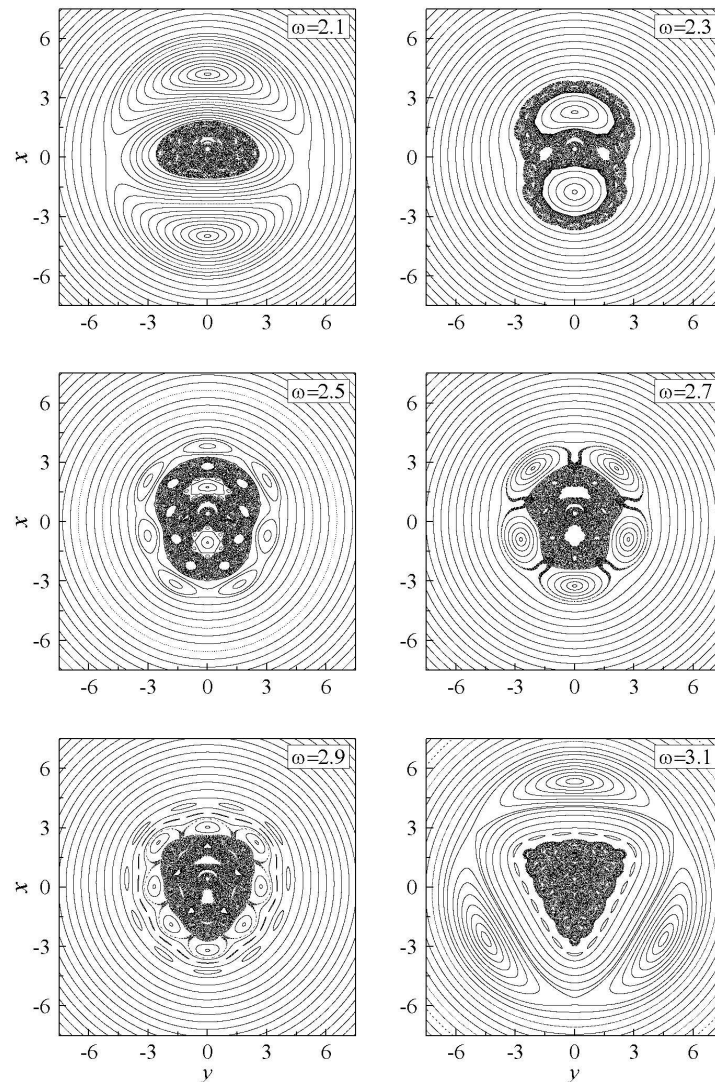


Рис. 4. Отображения Пуанкаре потока при  $a = 2.1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\delta = 0.8$  и указанных значениях частоты возмущения

Рис. 3 иллюстрирует механизм образования хаотического многообразия при целом  $\nu$  в случае  $\Omega a^2 > 4$ , т. е. когда невозмущенный поток разделен сепаратрисой. Мы видим, что этот механизм аналогичен рассмотренному, с тем отличием, что при малых возмущениях наблюдается стадия развития присепаратрисного хаоса.

Этот рисунок получен при  $\nu = 3$ . Если бы мы взяли другое целое  $\nu$ , то обнаружили бы сходную картину и резонансов, и хаотизации потока, но с соответствующими изменениями. Например, при  $\nu = 4$  мы наблюдали бы в окрестности сепаратрисы вместо резонанса третьего порядка — резонанс порядка четыре, соответственно форма хаотического многообразия изменилась бы с треугольной на четырехугольную.

Рис. 4 отражает изменение картины хаотизации потока с ростом  $\nu$  на единицу при  $\Omega > 0$  и фиксированной амплитуде возмущения. Обозначим  $[\nu]$  целую часть  $\nu$ . Неожиданным оказалось наличие при  $\nu$ , близких к  $[\nu]$ , вблизи области хаотизации резонанса порядка  $[\nu]$ . На рисунке

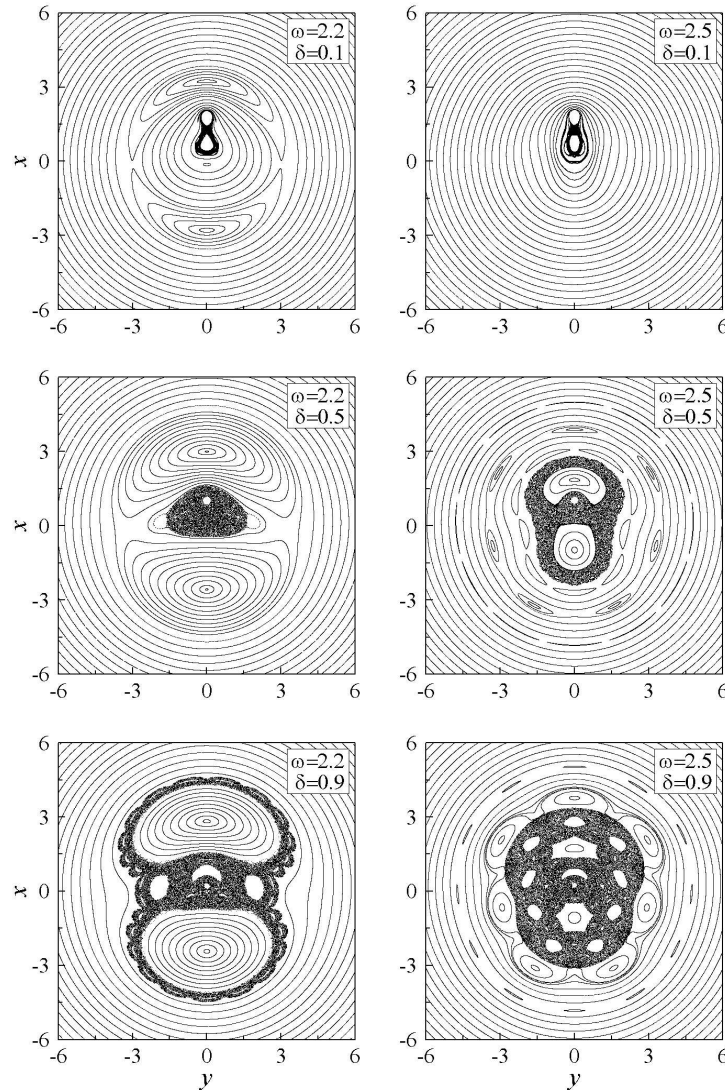


Рис. 5. Отображения Пуанкаре потока при  $a = 2.1$ ,  $\Omega = 1$  и указанных частотах и амплитуды возмущения

— это резонанс второго порядка при  $\omega = 2.1$  и третьего при  $\omega = 3.1$ . Исследование показывает, что такие резонансы образуются при целом  $\nu$  на бесконечности и по мере увеличения  $\nu$  до следующего целого последовательно проходят весь путь от бесконечности до центра.

Рис. 5 демонстрирует развитие хаотического многообразия системы с ростом амплитуды возмущения при  $\nu$  отличном от целого. На этом рисунке приведены две серии отображений Пуанкаре, вычисленные соответственно при  $\nu = 2.2$  и  $\nu = 2.5$ . Мы видим, что при  $\nu = 2.2$  крупный резонанс второго порядка (отсутствующий вблизи области хаотизации и при  $\nu = 2$ , и при  $\nu = 2.5$ ) оказывает существенное влияние на хаотическое многообразие, в частности, определяет его размер и форму. При  $\nu = 2.5$  и для малых амплитуд возмущения при  $\nu = 2.2$  процесс хаотизации развивается по тому же сценарию, что и для целых  $\nu$ .

Рис. 6 дает представление об особенностях хаотизации потока при  $\Omega < 0$ . Одна из особенностей состоит в том, что при целых  $\nu$  становление и развитие хаотического многообразия происходят внутри и в малой окрестности снаружи большей петли сепаратрисы. Еще одна проявляется

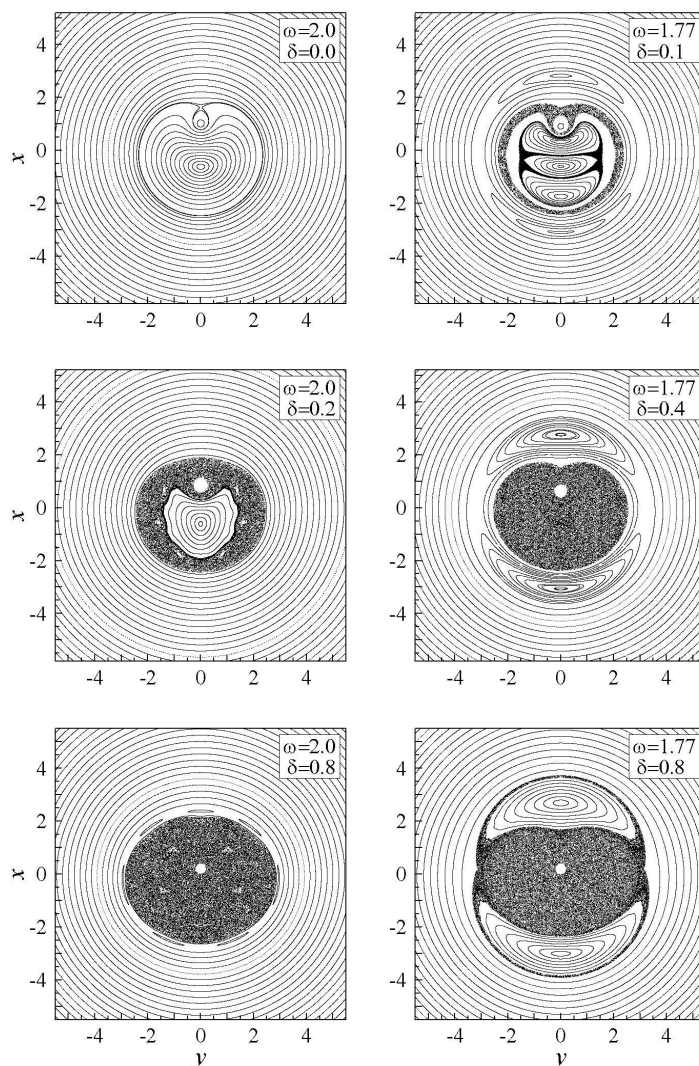


Рис. 6. Отображения Пуанкаре потока при  $a = 1$ ,  $\Omega = -1$  и указанных частотах и амплитуды возмущения

в поведении резонансов при дробных  $\nu$  — ожидаемые вблизи области хаотизации крупные резонансы порядка  $[\nu]$  не наблюдаются. Зато теперь такие резонансы наблюдаются при  $\nu$  близких к  $[\nu] + 1$ . Например, при  $\omega = 1.77$  мы видим на рисунке крупный резонанс порядка два. Благодаря таким резонансам, область хаотизации потока значительно превосходит по размерам область, ограниченную сепаратрисой.

Рис. 2–6 свидетельствуют, что область хаотизации потока состоит из разрушенных резонансов сравнительно малого порядка. Резонансы высших порядков слишком узки, чтобы оказывать заметное влияние на ее размер — на рисунках такие резонансы просто не видны. Но, конечно, они присутствуют на фазовой плоскости, что демонстрирует рис. 7, составленный из последовательно увеличенного фрагмента внутренней области потока. Трудно усмотреть в распределении этих резонансов какую-либо регулярность, однако она имеется, и ниже мы объясним местоположение и вычислим кратность каждого из этих резонансов.



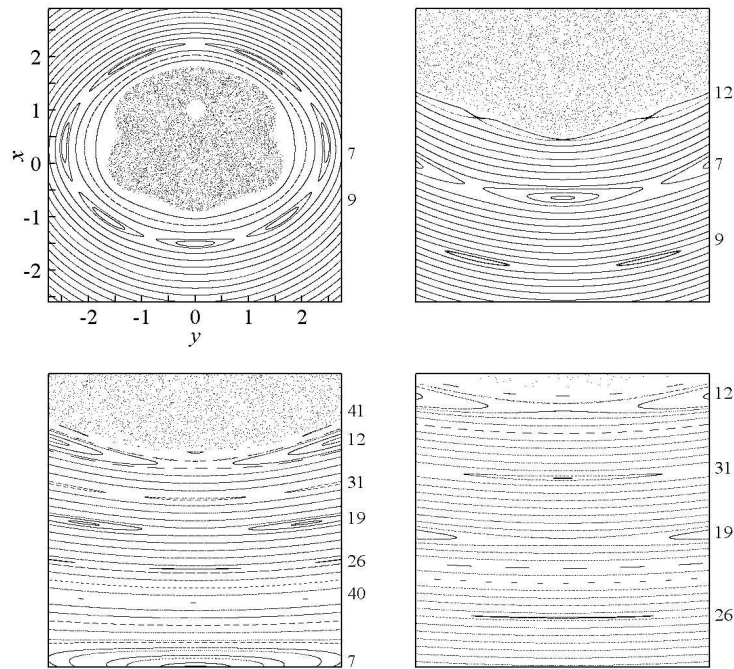


Рис. 7. Фрагменты потока при  $a = 2.1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\omega = 2$  и  $\delta = 0.5$ . Числа справа — порядки соответствующих резонансов

### 3. Аналитическое исследование

Этот раздел посвящен аналитическому изучению резонансов системы во внешней области фазовой плоскости. Знание их распределения и ширин позволяет согласно подходу Чирикова [2] определить местоположение и размер областей хаотизации системы.

Вопрос о распределении резонансов рассматривается в разделе 3.1. Здесь получают аналитическое объяснение все экспериментальные факты, касающиеся расположения резонансов и их участия в хаотизации потока.

В разделе 3.2 вычисляется главный член асимптотики ширины произвольного резонанса по обратному расстоянию до него и амплитуде возмущения (формула (3.9)). Оказывается, что эта ширина убывает по показательному закону с ростом порядка и кратности резонанса. Такой характер убывания ширин резонансов обосновывает наблюдаемую в эксперименте ограниченность области хаотизации.

#### 3.1. Переход к переменным угол—действие

Исследование резонансов произвольной гамильтоновой системы предполагает переход в ее гамильтониане к координатам угол—действие [2, 3, 4].

В случае рассматриваемой системы этот переход тривиален, коль скоро мы ограничиваемся ее изучением во внешней области фазовой плоскости. В самом деле, во внешней области для

гамильтониана, очевидно, справедливо представление

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \ln r + \frac{1}{2}\Omega r^2, \quad H_1 = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_c^m \cos(m\phi)}{mr^m}, \quad (3.1)$$

где  $r$  и  $\phi$  — полярные координаты на  $\mathbb{R}^2$ . При этом  $H_0$  естественно считать *невозмущенным гамильтонианом*, а  $H_1$  — его *возмущением*. При таком определении невозмущенного гамильтониана координата действие есть просто  $J = r^2/2$ , а координата угол —  $\phi$ .

### 3.2. Распределение резонансов

В основе предлагаемого ниже подхода к анализу распределения резонансов во внешней области фазовой плоскости лежит их особое подразделение на серии. Мы увидим, что это подразделение проясняет наблюдаемую в эксперименте специфику в расположении резонансов.

#### 3.2.1. Действие, соответствующее резонансу

Анализ распределения резонансов осуществляется при помощи функции

$$J_{mn} = \frac{m}{2\Omega(\nu n - m)}, \quad (3.2)$$

связывающей резонанс порядка  $m$  и кратности  $n$  со значением координаты действие, отвечающим этому резонансу. Данная функция получается обращением зависимости частоты оборота фазовой частицы по невозмущенной орбите от действия,  $\omega_0 = \partial H_0 / \partial J = \Omega + 1/(2J)$ , с последующей подставкой выражения для  $\omega_0$  из резонансного условия  $m\omega_0 - n\omega = 0$  при  $\omega = \nu\Omega$ .

Фактически  $J_{mn}$  есть функция отношения  $m/n$ . Ее графики при различном выборе знака параметра  $\Omega$  представлены на рис. 8. Мы видим, что  $J_{mn}$  есть возрастающая в своей области определения функция с вертикальной асимптотой  $m/n = \nu$ .

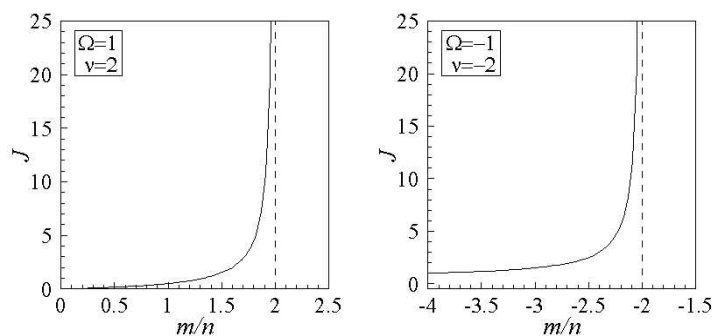


Рис. 8. Действие как функции резонансного отношения  $m/n$

Резонанс порядка  $m$  и кратности  $n$  далее будем обозначать или парой  $(n, m)$ , или дробью  $m/n$ , где как удобно.

В последующем предполагается  $\Omega > 0$ . Случай  $\Omega < 0$  рассматривается аналогично.

### 3.2.2. Серии резонансов

Формула (3.2), предоставляя полную информацию о распределении резонансов, не объясняет, почему в численном эксперименте проявляются вполне конкретные из них. Например, при  $\nu = 2$  — это резонансы нечетных порядков 1, 3, 5, 7 и т. д. (см. рис. 2), при  $\nu = 3$  — резонансы порядков 5, 13, 8, 11, 14, 17 (рис. 3), при  $\nu = 2.5$  — порядков 9, 7 и 12 (рис. 5).

Ясность в этом вопросе достигается специальным подразделением резонансов на серии с привлечением дополнительной информации о ширинах резонансов. В следующем разделе мы покажем, что ширины резонансов спадают по показательному закону с ростом их порядка и кратности. Для насущных целей, однако, достаточно просто считать, что более крупным резонансам отвечают меньшие порядки и кратности.

Положим

$$D_\nu = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \nu - 1 < m/n \leq \nu\}. \quad (3.3)$$

Мы утверждаем, что для произвольного  $\nu$  множества резонансов

$$s_i(\nu) = \left\{ \frac{[\nu j] - i}{j} \mid j \in \mathbb{N}, j \geq i + 1 \right\} \quad (i \in \mathbb{N} \cup 0) \quad (3.4)$$

расслаивают  $D_\nu$ .<sup>1</sup>

В самом деле, зафиксируем в (3.3) и (3.4)  $j = n$ . Тогда, согласно определениям этих множеств, для доказательства утверждения достаточно установить эквивалентность неравенств  $(\nu - 1)j < m \leq \nu j$  и  $[\nu j] - j + 1 \leq m \leq [\nu j]$  при произвольном  $m \in \mathbb{N}$ . Но эта эквивалентность, на наш взгляд, очевидна.

Множества (3.4) назовем *сериями резонансов*.

Приведем начальные (нулевую и первую) серии резонансов для значений  $\nu$ , которые использовались в численном эксперименте:

$$\begin{aligned} s_1(2) &= \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots \right\}, & s_1(3) &= \left\{ \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \dots \right\}, & s_2(3) &= \left\{ \frac{7}{3}, \frac{10}{4}, \frac{13}{5}, \frac{16}{6}, \dots \right\}, \\ s_0(2.2) &= \left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \dots \right\}, & s_0(2.5) &= \left\{ \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{10}{4}, \dots \right\}, & s_1(2.5) &= \left\{ \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Мы видим, что резонансы именно этих серий наблюдаются на картинах рис. 2–5!

Заметим, что нулевая серия резонансов при целых  $\nu$  не реализуется на фазовой плоскости — в этом случае  $m = \nu n$  и, следовательно,  $J_{mn} = \infty$ .

Приведем еще результат распределения по сериям резонансов рис. 7. Эти резонансы суть 41/24, 12/7, 31/18, 19/11, 26/15, 40/23, 7/4 и 9/5. Из них последние два принадлежат первой серии, 12/7 — второй, 19/11 — третьей, 26/15 — четвертой, 31/18 — пятой, 40/23 — шестой и 41/24 — седьмой.

Почему все же в эксперименте при рассмотрении достаточно узкого кругового кольца в первую очередь мы замечаем резонансы низших серий, а резонансы высших оказываются более узкими? Для случая целого  $\nu$  ответ дают следующие два утверждения.

- 1) Расстояние по  $J$  между элементами  $i$ -ой серии постоянно и равно  $\nu/(2\Omega i)$ .
- 2) Для любого резонанса  $m_1/n_1$  из  $(i + 1)$ -ой серии найдется резонанс  $m/n$  из  $i$ -ой серии, такой, что  $m_1/n_1 \leq m/n$  и  $m \leq m_1$  и  $n \leq n_1$ . Иначе говоря, любой резонанс серии выше первой мажорируется на фазовой плоскости более крупным резонансом, меньшей серии.

<sup>1</sup>Напомним, что  $[x]$  и  $\{x\}$  обозначают соответственно целую и дробную часть числа  $x \in \mathbb{R}$ .

Первое утверждение проверяется непосредственно с помощью формулы (3.2) и определения (3.4). Для доказательства второго возьмем  $n = n_1 - 1$ . Тогда  $m_1/n_1 = \nu - (i+1)/n_1 = \nu - (i+1)/(n+1) < \nu - i/n = m/n$ , ибо (см. (3.4))  $n > i$ . Кроме того,  $m = \nu n - i = \nu(n_1 - 1) - i = m_1 - \nu + 1 < m_1$ , что и завершает доказательство.

В частности, для данного резонанса ближайшие к нему слева и справа резонансы более высоких серий имеют меньшую ширину. Например, при  $\nu = 2$  для резонанса  $7/4$  из первой серии ближайший к нему слева резонанс второй серии есть  $12/7$ . В свою очередь, ближайший к  $12/7$  справа резонанс третьей серии есть  $19/11$ . Обращаясь к рис. 7, мы видим, что резонанс  $12/7$  уже резонанса  $7/4$ , а резонанс  $19/11$  уже резонанса  $12/7$ .

В случае дробного  $\nu$  поведение резонансов усложняется. Нижеследующее рассмотрение имеет целью дать представление об особенностях этого случая.

Запишем (3.2) в координатах  $i, j$ :

$$J_{ij} = \frac{\nu j}{2\Omega(\{\nu j\} + i)} + \frac{1}{2\Omega}, \quad (3.5)$$

и рассмотрим отображение  $j \rightarrow \{J_{ij} : i \in \mathbb{N} \cup 0\}$  при целых, рациональных и иррациональных  $\nu$ . Соответствующие графики приведены на рис. 9 и 10.

Мы видим, что при целом  $\nu$  каждой серии резонансов отвечает в пространстве  $(j, J)$  последовательность точек, укладывающихся на прямую с тангенсом угла наклона  $\nu/(2\Omega i)$ . Соответственно расстояние по  $J$  между соседними резонансами серии фиксировано и равно этой величине.

Если  $\nu$  — рациональное, но не целое, то, во-первых, появляется нулевая серия резонансов, а во-вторых, каждая серия подразделяется на подсерии. Резонансы отдельной подсерии снова укладываются на прямую. Число подсерий в каждой серии, исключая нулевую, равно периоду числа  $\nu$  (т. е. знаменателю соответствующей несократимой дроби). Число подсерий в нулевой серии на единицу меньше. Расстояние по  $J$  между соседними резонансами в серии теперь меняется, однако между соседними резонансами в подсерии — фиксировано и равно тангенсу угла наклона соответствующей прямой, умноженному на период числа  $\nu$ .

При иррациональном  $\nu$  также присутствует нулевая серия резонансов. Резонансы отдельной серии подразделяются на подсерии лишь в пределах выбранного масштаба изменения  $j$ , причем приближенно. При разных масштабах число подсерий разное и определяется соответствующим приближенным периодом числа  $\nu$ .

### 3.3. Перекрывание резонансов

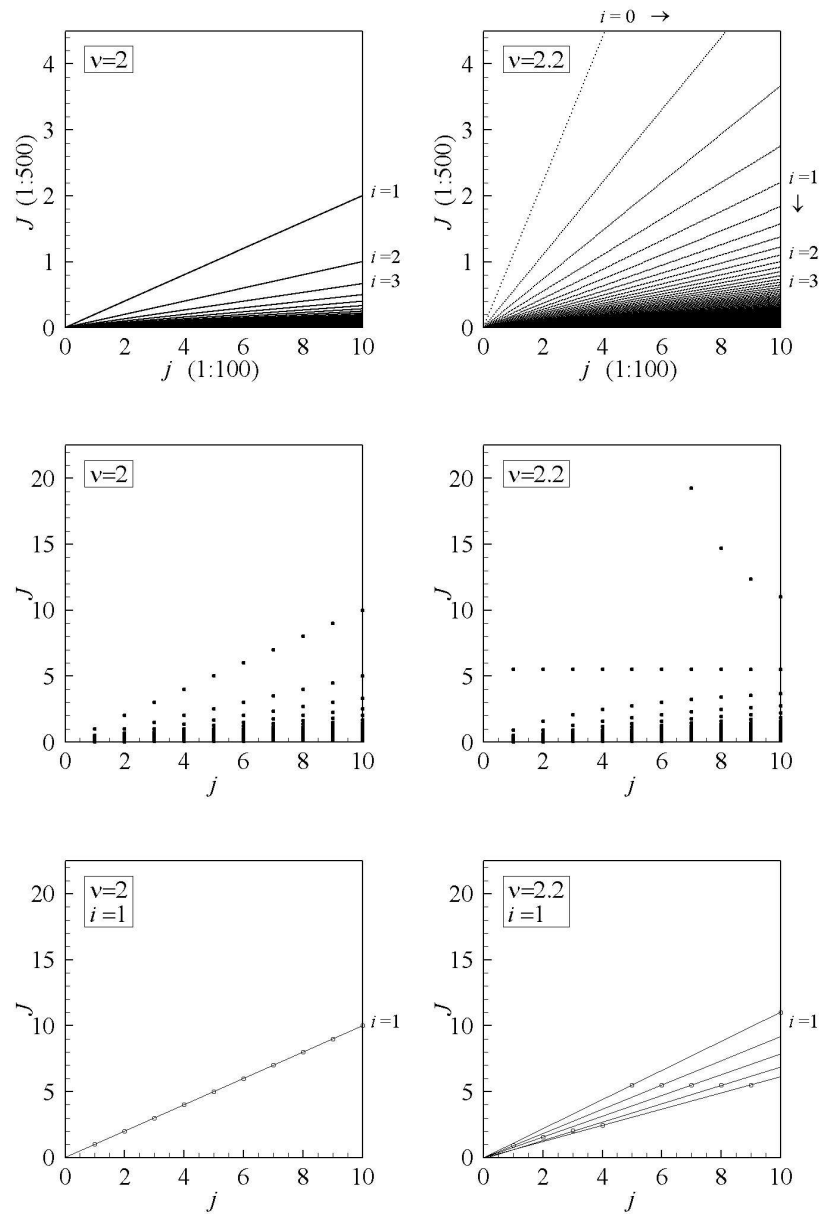
Выделим резонансные гармоники в гамильтониане (3.1) явно, т. е. представим его возмущенную часть  $H_1$  в виде двойного ряда Фурье по  $\phi$  и  $\omega t$ . Имеем, опуская простые выкладки,

$$H_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^m H_{mn} \cos(m\phi - n\omega t), \quad (3.6)$$

где

$$H_{mn} = \frac{(-1)^{n+1} a^m}{m r^m} \sum_{k=0}^{[(m-n)/2]} \binom{m}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n+2k}. \quad (3.7)$$

Используя (3.7), вычислим полуширину  $\mu_{mn}$  резонанса  $m/n$ . Напомним, что она определяется как максимальное значение импульса на сепаратрисе нелинейного маятника, аппроксими-

Рис. 9. Распределение резонансов в пространстве  $(j, J)$  при рациональных  $\nu$ 

рующего систему в окрестности резонанса  $m/n$  [2, 4]. Можно показать (см. там же), что

$$\mu_{mn} = 2\sqrt{\left|\frac{H_{mn}}{\partial^2 H_0 / \partial J^2}\right|} \quad (J = J_{mn}). \quad (3.8)$$

Выполняя в (3.8) соответствующие подстановки, получаем после преобразований

$$\mu_{mn} = \sqrt{\frac{2a^m}{mr^{m-4}} \sum_{k=0}^{[(m-n)/2]} \binom{m}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \frac{\delta^{n+2k}}{2^{n+2k}}} \quad \left(r = \sqrt{\frac{m}{\Omega(\nu n - m)}}\right). \quad (3.9)$$

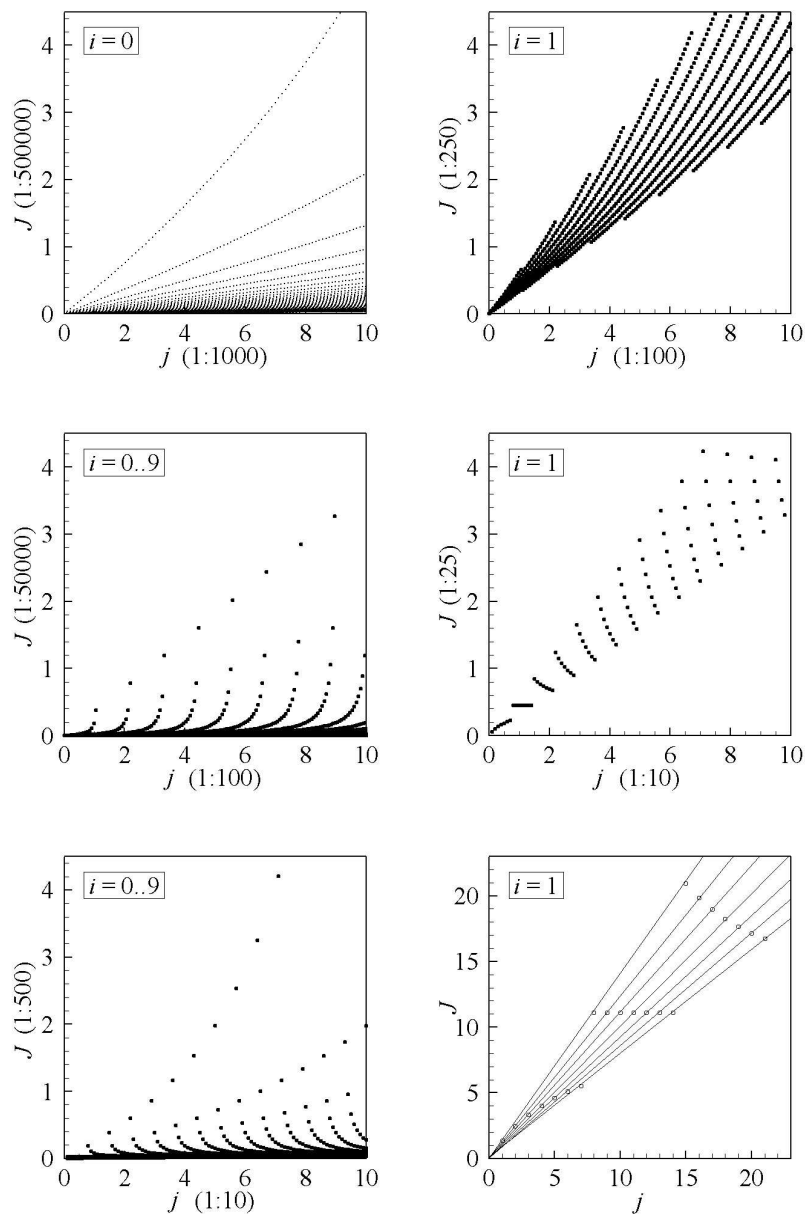


Рис. 10. Распределение резонансов в пространстве  $(j, J)$  при  $\nu = \pi$

С помощью этой формулы можно явно вычислить ширины резонансов системы и, зная расстояния между резонансами, оценить размер ее области хаотизации. Этот размер, в соответствии с критерием Чирикова [2] и рассмотрениями предыдущего раздела, мы определяем как расстояние до области, свободной от перекрывшихся резонансов нулевой и первой серий. Например, при  $\Omega = a = 1$ ,  $\nu = 2$  и  $\delta = 0.5$  (см. рис. 2) имеем  $\mu_{3,2} = 0.46$ ,  $\mu_{5,3} = 0.17$ ,  $\mu_{7,4} = 0.05$ ,  $\mu_{9,5} = 0.01$ . При этом расстояние по  $J$  между соседними резонансами фиксировано и равно единице. Мы видим, что уже резонансы  $3/2$  и  $5/3$  не пересекаются, т. е. область хаотизации ограничена резонансом  $3/2$ .

Формула (3.9) замечательна еще и тем, что устанавливает, грубо говоря, показательный закон убывания ширин резонансов с ростом их порядка и кратности. Точнее справедлива (весьма завышенная) оценка:

$$\mu_{mn} \leq r^2 \epsilon_1^m \epsilon_2^n \quad \left( \epsilon_1 = \sqrt{\frac{2a(1+\delta)}{r}}, \epsilon_2 = \sqrt{\frac{\delta}{2(1+\delta)}} \right). \quad (3.10)$$

Эта оценка получается применением к (3.9) непосредственно проверяемого неравенства

$$\binom{m}{n+2k} \binom{n+2k}{k} \leq \binom{m}{n} \binom{m-n}{2k} \binom{2k}{k} < 2^m 2^{2k} \binom{m-n}{2k} \quad (3.11)$$

с последующим суммированием получившегося биномиального ряда и преобразованием.

Используя ее, оценим суммарную ширину резонансов во внешности круга достаточно большого радиуса  $r_0$ . При  $r \geq r_0$  имеем согласно (3.2) (или выражения в скобках в (3.9))

$$\lambda n \leq m < \nu n \quad \left( \lambda = \nu \frac{\Omega r_0^2}{1 + \Omega r_0^2} \right). \quad (3.12)$$

При этом без ограничения общности можно считать  $n \geq n_0$ , где  $n_0$  — сколь угодно большое натуральное число. Тогда для искомой ширины, суммируя соответствующие геометрические прогрессии, имеем

$$\mu_{r_0, \delta} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\lambda n \leq m < \nu n} \mu_{mn} \leq \frac{r^2 \epsilon_1^{\lambda n_0} \epsilon_2^{n_0}}{(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_1^{\lambda} \epsilon_2)} \quad (r = r_0). \quad (3.13)$$

Мы видим, что  $\mu_{r_0, \delta} \rightarrow 0$ , коль скоро  $r_0 \rightarrow \infty$  (при любом  $\delta$ ) или  $\delta \rightarrow 0$ . Вывод: при любом выборе параметров системы ее область хаотизации ограничена. Подчеркнем, что это утверждение ни в коей мере не следует считать строго доказанным — исходные формулы (3.7) и (3.8) справедливы лишь асимптотически на больших расстояниях от внутренней области потока и при малых амплитудах возмущения.

## 4. Заключение

Итак, проведено исследование хаотического режима и нелинейных резонансов гамильтоновой системы, описывающей вращающийся поток жидкости, возмущенный периодическим движением точечного вихря.

Основные результаты работы следующие:

- 1) Численно продемонстрированы особенности хаотического режима и распределения резонансов системы.
- 2) Введено понятие *серии резонансов*, позволившее адекватно описать наблюдаемую в эксперименте картину распределения резонансов.
- 3) Установлен закон спадания ширин резонансов с ростом расстояния до них и с уменьшением амплитуды возмущения. С помощью этого закона показано, что на больших расстояниях от центра глобальная хаотизация потока невозможна.

Результаты работы могут оказаться полезными при исследовании ряда отличных от рассмотренной гамильтоновых систем, описывающих вихревые потоки. Например, вполне аналогичной выглядит задача об адвекции на больших расстояниях системы трех и более вихрей с ограниченными траекториями движения. (Несмотря на популярность этой задачи, мало что сказано о поведении резонансов в системе.)

Автор выражает благодарность К. В. Кошелю за предложенную задачу и внимание к автору на всех этапах ее решения. Работа поддержана грантом РФФИ-ДВО (проект 06-05-96080), грантом ДВО (проект 06-I-P13-048) и Программой Президиума РАН № 14, раздел 2.

## Список литературы

- [1] Davies P. A., Koshel K. V., Sokolovskiy M. A. *Chaotic advection and nonlinear resonances in a periodic flow above a submerged obstacle* // IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence / Book of abstracts. Steklov Mathematical Institute of RAS, 2006, p. 72–74.
- [2] Chirikov B. V. *A universal instability of many dimensional oscillator systems* // Phys. Rep., 1979, Vol. 52, p. 263–379.
- [3] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [4] Заславский Г. М. *Физика хаоса в гамильтоновых системах*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 288 с.